Econometría I
Esperanza Condicional y Modelo Lineal de Regresión

Ramiro de Elejalde

Facultad de Economía y Finanzas
Universidad Alberto Hurtado

Outline

Referencias: Cap. 3.1.1 y 3.1.2 de Angrist and Pischke, y cap. 2 de Wooldridge.

Esperanza condicional y modelo de regresión

En esta unidad, identificamos momentos poblacionales para medir el efecto causal de interés.

Ejemplo: ¿Cuál es el efecto causal de un año adicional de educación en salarios?

Esperanza condicional y modelo de regresión

En esta unidad, identificamos momentos poblacionales para medir el efecto causal de interés.

Ejemplo: ¿Cuál es el efecto causal de un año adicional de educación en salarios?

- Suponemos que hay asignación aleatoria al grupo tratamiento o control.
  ¿Qué momento poblacional mide el efecto de un año adicional de educación en salarios?

Esperanza condicional y modelo de regresión

En esta unidad, identificamos momentos poblacionales para medir el efecto causal de interés.

Ejemplo: ¿Cuál es el efecto causal de un año adicional de educación en salarios?

- Suponemos que hay asignación aleatoria al grupo tratamiento o control.
  ¿Qué momento poblacional mide el efecto de un año adicional de educación en salarios?

  $\Rightarrow$ Esperanza condicional

  ▸ educación-salarios

Esperanza condicional y modelo de regresión

En esta unidad, identificamos momentos poblacionales para medir el efecto causal de interés.

Ejemplo: ¿Cuál es el efecto causal de un año adicional de educación en salarios?

- Suponemos que hay asignación aleatoria al grupo tratamiento o control.
  ¿Qué momento poblacional mide el efecto de un año adicional de educación en salarios?
  $\Rightarrow$ Esperanza condicional

  educación-salarios

Esperanza condicional y modelo de regresión

En esta unidad, identificamos momentos poblacionales para medir el efecto causal de interés.

Ejemplo: ¿Cuál es el efecto causal de un año adicional de educación en salarios?

- Suponemos que hay asignación aleatoria al grupo tratamiento o control.
  ¿Qué momento poblacional mide el efecto de un año adicional de educación en salarios?
  $\Rightarrow$ Esperanza condicional
  ▸ educación-salarios

  $\Rightarrow$ Modelo de Regresión Lineal: Es la mejor aproximación lineal a la esperanza condicional.
  ▸ educación-salarios

Repaso de estadística

Repaso de estadística

- Población

  El grupo o colección de todos los posibles elementos de interés. Pensamos en la población como infinitamente grande.

- Variable aleatoria y

  Resumen numérico de un resultado aleatorio.

- Función de probabilidad de y

  Probabilidad que y asuma distintos valores en la población: $\Pr(y = t)$.

Repaso de estadística

- Esperanza o media poblacional: $\mu = \mathbb{E}(y) = \sum_t t \Pr(y = t)$.
  - Propiedades: La esperanza es un operador lineal.
    $\mathbb{E}(a + bx) = a + b\,\mathbb{E}(x)$
- Varianza: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(y) = \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y))^2]$
  - Propiedades
    $\mathrm{Var}(y) = \mathbb{E}(y^2) - \mathbb{E}(y)^2$
    $\mathrm{Var}(a + bx) = b^2\,\mathrm{Var}(x)$
    $\mathrm{Var}(bx + cy) = b^2\,\mathrm{Var}(x) + c^2\,\mathrm{Var}(y) + 2bc\,\mathrm{Cov}(x, y)$

Función de probabilidad conjunta y condicional

- Función de probabilidad conjunta de x, y: Probabilidad que x e y asuman distintos valores en la población $\Pr(x = u, y = t)$.
    - Función de probabilidad marginal de y: $\Pr(y = t) = \sum_u \Pr(x = u, y = t)$
- Función de probabilidad condicional

  La probabilidad de y dado un valor de otra variable aleatoria x: $\Pr(y|x) = \frac{\Pr(y,x)}{\Pr(x)}$.

Esperanza condicional

Esperanza condicional

Definición

Esperanza condicional

La esperanza condicional de la variable dependiente y dado un vector de K variables explicativas $x = (x_1, ..., x_K)$ es la media poblacional de y manteniendo fijas las x's.

- Si $\mathbb{E}\,|y| < \infty$, la función de esperanza condicional de y dado $x = u$ es

$$\mathbb{E}(y|x = u) = \int t\, f_{y|x}(t|u)dt$$

para y continua, y

$$\mathbb{E}(y|x = u) = \sum_t t\, \Pr(y = t|x = u)$$

para y discreta.

Ejemplo: Educación y salarios

Cuadro 1: Función de esperanza condicional

	$\mathbb{E}(ahe \mid bachelor)$	$\Pr(bachelor)$
$bachelor = 0$	15.33	0.52
$bachelor = 1$	22.91	0.48

Ejemplo: Educación y salarios

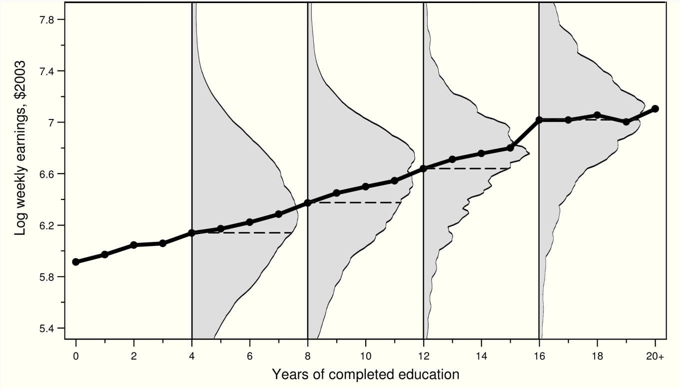


Figura 1: Esperanza condicional del log salarios semanales dado el nivel educativo. La muestra incluye hombres blancos entre 40 y 49 años de la muestra del 5 % del Censo 1980 (IPUMS).

Esperanza condicional

Ley de esperanzas iteradas

Ley de esperanzas iteradas (LEI)

- Propiedad:

$$\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y|x)]$$

Ley de esperanzas iteradas (LEI)

- Propiedad:

$$\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y|x)]$$

Importante: $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_y(y|x)]$, tomamos primero la esperanza en y manteniendo constante x y luego tomamos la esperanza en x.

Demostración: Utilizar $f_y = \int_x f_{xy} dx$ y $f_{y|x} = f_{xy}/f_x$.

Ejemplo: LEI $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y|x)]$

Cuadro 2: Función de esperanza condicional

	$\mathbb{E}(ahe\|bachelor)$	$\Pr(bachelor)$
$bachelor = 0$	15.33	0.52
$bachelor = 1$	22.91	0.48

Ejemplo: LEI $\mathbb{E}(y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(y|x)]$

Cuadro 3: Función de esperanza condicional

	$\mathbb{E}(ahe \mid bachelor)$	$\Pr(bachelor)$
$bachelor = 0$	15.33	0.52
$bachelor = 1$	22.91	0.48

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(ahe) =& \mathbb{E}[\mathbb{E}(ahe \mid bachelor)] \\
=& \mathbb{E}(ahe \mid bachelor = 0) \Pr(bachelor = 0) \\
&+ \mathbb{E}(ahe \mid bachelor = 1) \Pr(bachelor = 1) \\
=& 15{,}33 \times (1 - 0{,}48) + 22{,}91 \times 0{,}48 = 18{,}97
\end{aligned}
$$

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia

  $x \perp\!\!\!\perp y$ (independientes) si $\Pr(y|x) = \Pr(y)$.

  Una definición equivalente: $x \perp\!\!\!\perp y$ (independientes) si $\Pr(x, y) = \Pr(y)\Pr(x)$.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia en media

  $\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y)$.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Covarianza entre x, y: $\text{Cov}(x,y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y))]$
    - Mide la relación lineal entre x e y.
    - Propiedades:
      $\text{Cov}(x,y) = \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y)$
      $\text{Cov}(y, a + bx) = b\,\text{Cov}(x,y)$

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia en media implica ausencia de correlación

$$\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \mathrm{Cov}(x, y) = 0.$$

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia en media implica ausencia de correlación

$$\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \mathrm{Cov}(x, y) = 0.$$

- Demostración: Utilice la LEI en

$$\mathbb{E}(xy) = \mathbb{E}[x\,\mathbb{E}(y|x)] = \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y),$$

y reemplace en la definición de $\mathrm{Cov}(x, y) = \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y)$.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia en media implica ausencia de correlación

$$\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \mathrm{Cov}(x, y) = 0.$$

- Demostración: Utilice la LEI en

$$\mathbb{E}(xy) = \mathbb{E}[x\,\mathbb{E}(y|x)] = \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y),$$

  y reemplace en la definición de $\mathrm{Cov}(x, y) = \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y)$.

- Independencia en media implica ausencia de correlación con cualquier función de x:
  $\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \mathrm{Cov}(g(x), y) = 0$ para cualquier función $g(x)$.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia implica independencia en media.

$$y \perp\!\!\!\perp x \iff f_{y|x} = f_y \implies \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y).$$

Demostración: Utilice la definición de esperanza condicional.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Independencia implica independencia en media.

$$y \perp\!\!\!\perp x \iff f_{y|x} = f_y \implies \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y).$$

Demostración: Utilice la definición de esperanza condicional.

- Independencia implica independencia en todos los momentos de y. En particular, $y \perp\!\!\!\perp x \implies \text{Var}(y|x) = \text{Var}(y)$.

  Demostración: Utilice la definición de la varianza condicional $\text{Var}(y|x) = \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2|x]$.

Independencia, independencia en media y correlación.

- Resumen:

  $y \perp\!\!\!\perp x \implies \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \text{Cov}(x, y) = 0$

Independencia, independencia en media y correlación.

- Resumen:

  $$y \perp\!\!\!\perp x \implies \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \text{Cov}(x, y) = 0$$

  $$\text{Cov}(y, x) = 0 \;\not\Longrightarrow\; \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \;\not\Longrightarrow\; y \perp\!\!\!\perp x$$

Independencia, independencia en media y correlación.

- Resumen:

  $y \perp\!\!\!\perp x \implies \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \implies \text{Cov}(x, y) = 0$

  $\text{Cov}(y, x) = 0 \not\Longrightarrow \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \not\Longrightarrow y \perp\!\!\!\perp x$
- En la ayudantía se ven casos en donde:
  1. $\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y) \not\Longrightarrow y \perp\!\!\!\perp x$,
  2. $\text{Cov}(y, x) = 0 \not\Longrightarrow \mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y)$

Esperanza condicional

Descomposición

Descomposición utilizando la esperanza condicional

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = \mathbb{E}(y|x) + u,$$

donde u es independiente en media de x, es decir $\mathbb{E}(u|x) = 0$.

Descomposición utilizando la esperanza condicional

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = \mathbb{E}(y|x) + u,$$

donde u es independiente en media de x, es decir $\mathbb{E}(u|x) = 0$.

Demostración: Reemplace $u = y - \mathbb{E}(y|x)$ en $\mathbb{E}(u|x)$.

- Interpretación: Una variable aleatoria y se puede descomponer en una parte "explicada por x" y otra parte que no depende de x.

Esperanza condicional

Mejor predicción

La esperanza condicional es el mejor predictor de y

- La esperanza condicional es la función de x que minimiza el error cuadrático medio de predicción, es decir

$$\mathbb{E}(y|x) = \arg\min_{m(x)} \mathbb{E}[(y - m(x))^2].$$

La esperanza condicional es el mejor predictor de y

- La esperanza condicional es la función de x que minimiza el error cuadrático medio de predicción, es decir

$$\mathbb{E}(y|x) = \arg\min_{m(x)} \mathbb{E}[(y - m(x))^2].$$

- Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(y - m(x))^2] &= \mathbb{E}\{[(y - \mathbb{E}(y|x)) - (m(x) - \mathbb{E}(y|x))]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{(y - \mathbb{E}(y|x))^2 + (m(x) - \mathbb{E}(y|x))^2 \\
&- 2(y - \mathbb{E}(y|x))(m(x) - \mathbb{E}(y|x))\} \\
&= \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2] + \mathbb{E}[(m(x) - \mathbb{E}(y|x))^2] \\
&\geq \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2],
\end{aligned}$$

donde en la tercer línea utilizamos la LEI para demostrar que $\mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))(m(x) - \mathbb{E}(y|x))] = 0$.

Esperanza condicional

Descomposición de varianza

Descomposición de varianza

- La varianza de la variable aleatoria y se puede descomponer como

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(y) &= \mathrm{Var}(\mathbb{E}(y|x)) + \mathbb{E}(\mathrm{Var}(y|x)), && (1) \\ &= \mathrm{Var}(\mathbb{E}(y|x)) + \mathbb{E}(u^2), && (2) \end{aligned}$$

donde $\mathrm{Var}(y|x) = \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2|x]$ es la varianza de y condicional en x.

Descomposición de varianza

- Demostración: Para (1)

$$
\begin{aligned}
\text{Var}(y) &= \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y))^2], \\
&= \mathbb{E}\{[(y - \mathbb{E}(y|x)) + (\mathbb{E}(y|x) - \mathbb{E}(y))]^2\}, \\
&= \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}(y|x) - \mathbb{E}(y))^2], \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}((y - \mathbb{E}(y|x))^2|x)] + \text{Var}(\mathbb{E}(y|x)), \\
&= \mathbb{E}(\text{Var}(y|x)) + \text{Var}(\mathbb{E}(y|x)),
\end{aligned}
$$

donde utilizamos la LEI en la tercer y cuarta línea.

Descomposición de varianza

- Demostración: Para (2), utilizamos $y = \mathbb{E}(y|x) + u$ para escribir

$$\begin{aligned} \text{Var}(y|x) &= \text{Var}(u|x), \\ &= \mathbb{E}(u^2|x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Var}(y|x)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(u^2|x)), \\ &= \mathbb{E}(u^2), \end{aligned}$$

utilizando la LEI.

Modelo de regresión lineal

Modelo de regresión lineal

Definición

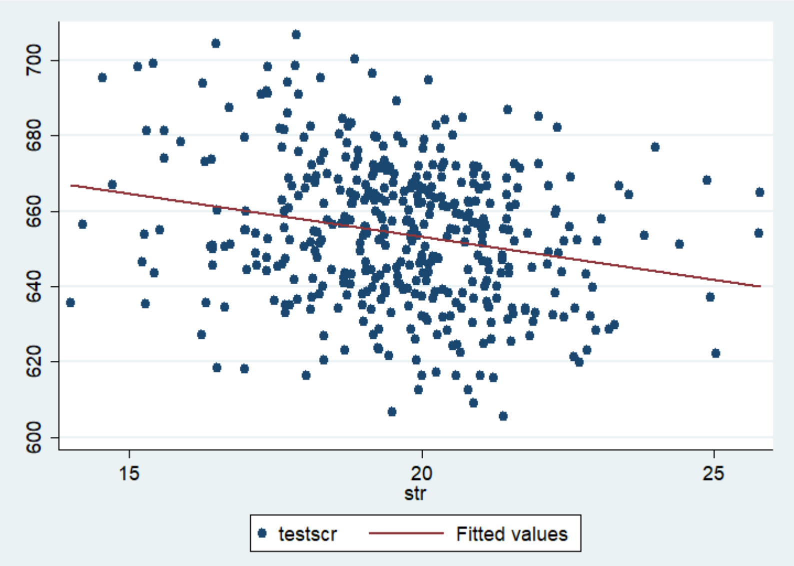
Modelo de Regresión Lineal : $\mathbb{L}(y|x) = x'\beta$

- Mejor predictor lineal: Es la función lineal $\mathbb{L}(y|x) = x'\beta$ que minimiza el error cuadrático medio de predicción entre las funciones lineales en x, es decir

$$\beta = \arg\min_b \mathbb{E}[(y - x'b)^2],$$

donde y es un escalar, $x = (x_1, ..., x_K)'$ es un vector de $K \times 1$ (casi siempre incluye una constante), y $\beta = (\beta_1, ..., \beta_K)'$ es un vector de $K \times 1$.

Ejemplo: Tamaño de clase y notas



¿Cómo se obtiene β de $\mathbb{L}(y|x) = x'\beta$?

¿Cómo se obtiene β de $\mathbb{L}(y|x) = x'\beta$?

- Utilizando las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial\, \mathbb{E}[(y - x'b)^2]}{\partial b} = 2\, \mathbb{E}[x(y - x'\beta)] = 0$$
$$\implies \beta = \mathbb{E}(xx')^{-1}\, \mathbb{E}(xy).$$

- Si $\mathbb{E}(xx')$ es no singular, entonces β existe y es única.
- Método de momentos: β tal que $\mathbb{E}[x(y - x'\beta)] = 0$.

Ejemplo: Modelo de regresión simple

- Si $x = (1, x_1)$, entonces $\mathbb{L}(y|x) = \beta_0 + \beta_1 x$ con

$$\beta_1 = \frac{\mathsf{Cov}(x_1, y)}{\mathsf{Var}(x_1)}, \text{ y}$$

$$\beta_0 = \mathbb{E}(y) - \beta_1 \, \mathbb{E}(x_1).$$

Modelo de regresión lineal

Descomposición

Descomposición utilizando el modelo de regresión

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = x'\beta + u,$$

donde u cumple que $\mathbb{E}(xu) = 0$.

Descomposición utilizando el modelo de regresión

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = x'\beta + u,$$

  donde u cumple que $\mathbb{E}(xu) = 0$.
- Demostración: $\mathbb{E}(xu) = \mathbb{E}(x(y - x'\beta)) = 0$ que se cumple por la definición de modelo de regresión por el método de momentos.

- x casi siempre incluye una constante, entonces $\mathbb{E}(u) = 0$. Por lo tanto si $\mathbb{E}(xu) = 0$ entonces $\text{Cov}(x, u) = 0$.

Descomposición utilizando el modelo de regresión

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = x'\beta + u,$$

donde u cumple que $\mathbb{E}(xu) = 0$.

- Interpretación: Una variable aleatoria y se puede descomponer en una parte "explicada por x" y otra parte no correlada con x.

Descomposición utilizando el modelo de regresión

- Siempre podemos descomponer a la variable aleatoria y en

$$y = x'\beta + u,$$

donde u cumple que $\mathbb{E}(xu) = 0$.

- Interpretación: Una variable aleatoria y se puede descomponer en una parte "explicada por x" y otra parte no correlada con x.
- Propiedad: Si denotamos el valor predicho de y dado x como $\hat{y} = \mathbb{L}(y|x) = x'\beta$ entonces $\mathbb{E}(\hat{y}u) = 0$ y si x incluye la constante $\text{Cov}(\hat{y}, u) = 0$.

Modelo de regresión lineal

Regresión particionada

Regresión particionada

- Dado el modelo de regresión múltiple

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + ... + \beta_K x_K + u.$$

Podemos recuperar β_k a partir de la regresión simple entre y y $\tilde{x}_k$, el residuo de la regresión de x_k en el resto de las variables explicativas $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_K$:

$$\beta_k = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{x}_k, y)}{\mathrm{Var}(\tilde{x}_k)},$$

donde

$$x_k = \sum_{j \neq k} \gamma_j x_j + \tilde{x}_k = \hat{x}_k + \tilde{x}_k.$$

Ejemplo: Dado $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$, tenemos $x_1 = \gamma_0 + \gamma_1 x_2 + \tilde{x}_1$ y $y + \delta_0 + \delta_1 \tilde{x}_1 + e$. Entonces $\delta_1 = \beta_1$.

Regresión particionada

$$\beta_k = \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{x}_k, y)}{\mathrm{Var}(\tilde{x}_k)}$$

- Interpretación: β_k mide el efecto de x_k sobre y, una vez que filtramos (controlamos por) el efecto de las demás variables explicativas.

Regresión particionada

- Demostración:
$$\frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, y)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)} = \frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + ... + \beta_K x_K + u)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)}.$$

  (1) $\text{Cov}(\tilde{x}_k, x_j) = 0$ para todo $j \neq k$, por construcción,
  (2) $\text{Cov}(\tilde{x}_k, u) = 0$ porque u no está correlado con x's y $\tilde{x}_k$ es una función lineal de x's.

  Entonces,
$$\begin{aligned}
\frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, y)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)} &= \beta_k \frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, x_k)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)}, \\
&= \beta_k \frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, \hat{x}_k + \tilde{x}_k)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)}, \\
&= \beta_k \frac{\text{Cov}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_k)}{\text{Var}(\tilde{x}_k)}, \\
&= \beta_k.
\end{aligned}$$

Modelo de regresión lineal

Justificación de utilizar el modelo de regresión

Justificación de utilizar el modelo de regresión como aproximación a la esperanza condicional.

- Si esperanza condicional es lineal entonces el modelo de regresión coincide con la esperanza condicional.
- El modelo de regresión es el mejor predictor lineal de y.
- El modelo de regresión es la mejor aproximación lineal a la esperanza condicional.

Esperanza condicional es lineal

- Si la esperanza condicional es lineal entonces coincide con el modelo de regresión.

Esperanza condicional es lineal

- Si la esperanza condicional es lineal entonces coincide con el modelo de regresión.

  Demostración: $\mathbb{E}(y|x) = x'\beta^*$.
  Por la propiedad de descomposición podemos escribir $y = \mathbb{E}(y|x) + u$ donde $\mathbb{E}(u|x) = 0$. Esto implica $\mathbb{E}[x(y - \mathbb{E}(y|x))] = 0$, entonces

$$\mathbb{E}[x(y - \mathbb{E}(y|x))] = \mathbb{E}[x(y - x'\beta^*)] = 0.$$

  De donde,

$$\beta^* = \mathbb{E}(xx')^{-1}\,\mathbb{E}(xy) = \beta.$$

Esperanza condicional es lineal

- Si la esperanza condicional es lineal entonces coincide con el modelo de regresión.

  Demostración: $\mathbb{E}(y|x) = x'\beta^*$.
  Por la propiedad de descomposición podemos escribir $y = \mathbb{E}(y|x) + u$ donde $\mathbb{E}(u|x) = 0$. Esto implica $\mathbb{E}[x(y - \mathbb{E}(y|x))] = 0$, entonces

  $$\mathbb{E}[x(y - \mathbb{E}(y|x))] = \mathbb{E}[x(y - x'\beta^*)] = 0.$$

  De donde,

  $$\beta^* = \mathbb{E}(xx')^{-1}\,\mathbb{E}(xy) = \beta.$$

- Ejemplos:
  (1) (y, x) se distribuyen conjuntamente normal,
  (2) Modelos saturados. Ejemplo: Cuando x es binaria, $\mathbb{E}(y|x) = \mathbb{E}(y|x=0) + [\mathbb{E}(y|x=1) - \mathbb{E}(y|x=0)]x$ es lineal.

Mejor predicción lineal

- El modelo de regresión lineal es el mejor predictor lineal de y dado x.

Mejor aproximación lineal a la esperanza condicional

- El modelo de regresión lineal es la mejor aproximación lineal a la esperanza condicional. Es decir,

$$\beta = \arg\min_{b} \mathbb{E}[(\mathbb{E}(y|x) - x'b)^2]$$

Mejor aproximación lineal a la esperanza condicional

- El modelo de regresión lineal es la mejor aproximación lineal a la esperanza condicional. Es decir,

$$\beta = \arg \min_b \mathbb{E}[(\mathbb{E}(y|x) - x'b)^2]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(y - x'b)^2] &= \mathbb{E}\{[(y - \mathbb{E}(y|x)) + (\mathbb{E}(y|x) - x'b)]^2\} \\
&= \mathbb{E}\{(y - \mathbb{E}(y|x))^2 + (\mathbb{E}(y|x) - x'b)^2 \\
&\quad + 2(y - \mathbb{E}(y|x))(\mathbb{E}(y|x) - x'b)\} \\
&= \mathbb{E}[(y - \mathbb{E}(y|x))^2] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}(y|x) - x'b)^2].
\end{aligned}$$

El primer término no depende de b, entonces $\beta = \arg \min_b \mathbb{E}[(y - x'b)^2] \iff \beta = \arg \min_b \mathbb{E}[(\mathbb{E}(y|x) - x'b)^2]$.

Ejemplo: Educación y salarios

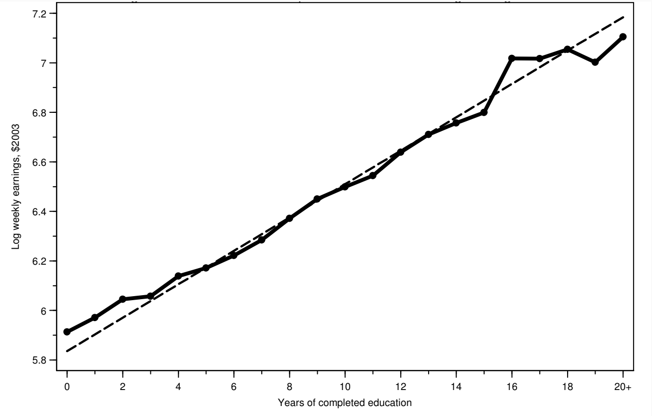


Figura 2: Regresión y esperanza condicional del log salarios semanales en el nivel educativo. La muestra incluye hombres blancos entre 40 y 49 años de la muestra del 5 % del Censo 1980 (IPUMS)

Modelo de regresión lineal

Descomposición de varianza

Descomposición de varianza en regresión

- Si x incluye una constante, la varianza de la variable aleatoria y se puede descomponer como

$$\mathrm{Var}(y) = \mathrm{Var}(x'\beta) + \mathbb{E}(u^2).$$

Demostración: Utilice la descomposición de $y = x'\beta + u$ y $\mathbb{E}(ux) = \mathrm{Cov}(u, x) = 0$.

Descomposición de varianza en regresión

- Si x incluye una constante, la varianza de la variable aleatoria y se puede descomponer como

$$\mathrm{Var}(y) = \mathrm{Var}(x'\beta) + \mathbb{E}(u^2).$$

  Demostración: Utilice la descomposición de $y = x'\beta + u$ y $\mathbb{E}(ux) = \mathrm{Cov}(u, x) = 0$.

- Coeficiente de determinación: R^2,

$$R^2 = 1 - \frac{\mathbb{E}(u^2)}{\mathrm{Var}(y)}.$$

  Indicador de la bondad de ajuste del modelo de regresión.

Ejemplo: Educación y salarios en US

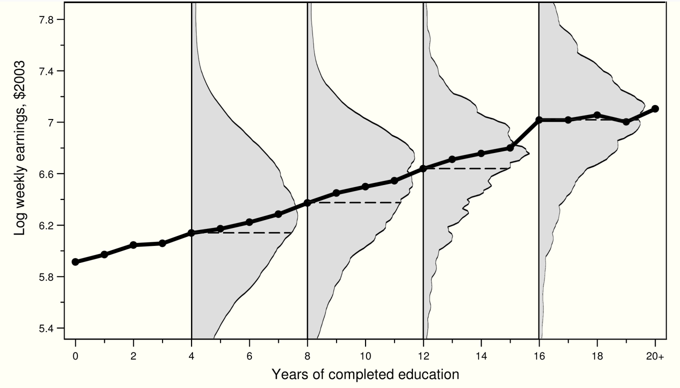


Figura 3: Esperanza condicional del log salarios semanales dado el nivel educativo. La muestra incluye hombres blancos entre 40 y 49 años de la muestra del 5 % del Censo 1980 (IPUMS).

Ejemplo: Educación y salarios en Chile

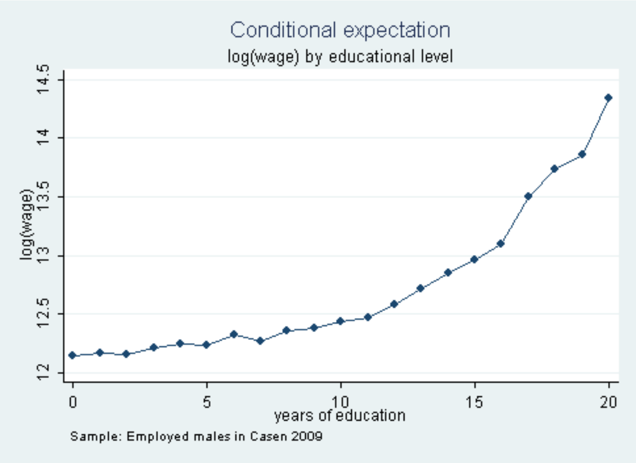


Figura 4: Esperanza condicional del log de salarios dado el nivel educativo. La muestra incluye hombres trabajadores en Casen 2009. back

Ejemplo: Educación y salarios en US

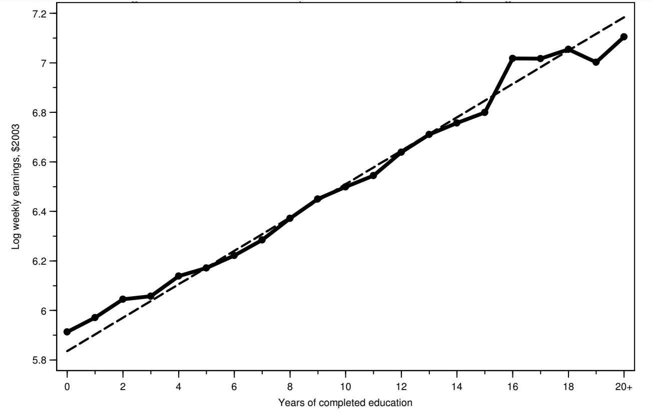
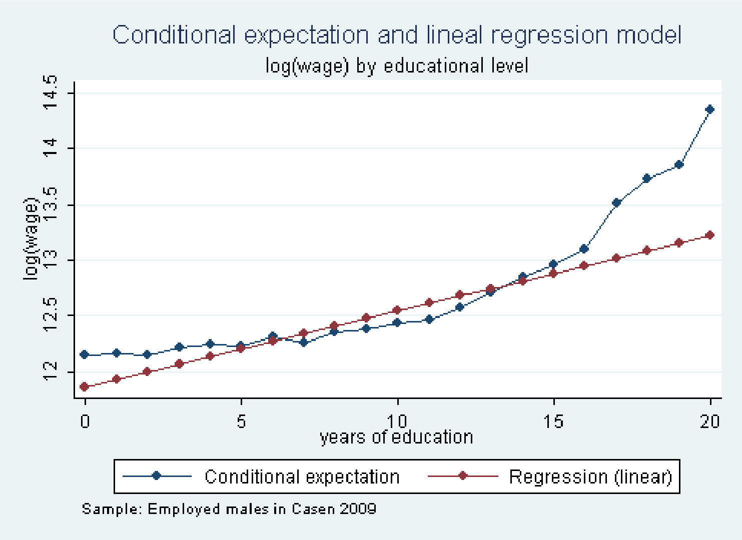


Figura 5: Regresión y esperanza condicional del log salarios semanales en el nivel educativo. La muestra incluye hombres blancos entre 40 y 49 años de la muestra del 5 % del Censo 1980 (IPUMS)

Ejemplo: Educación y salarios en Chile



Ejemplo: Educación y salarios en Chile

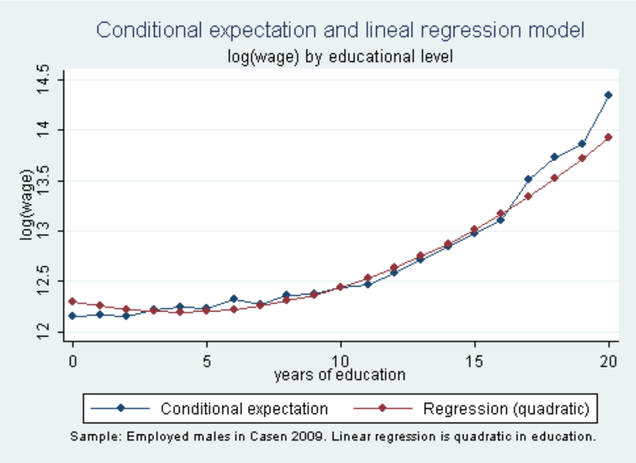


Figura 7: Regresión y esperanza condicional del log salarios semanales en el nivel educativo. La muestra incluye hombres trabajadores en Casen 2009. back