Econometría I
Tarea 2

Magíster en Economía, Universidad Alberto Hurtado

September 11, 2025

Fecha de entrega: 29 de Septiembre de 2025 (al principio de la ayudantía)

Total: 80 puntos

1. (20 puntos) Dada una muestra i.i.d. de tamaño N de una variable aleatoria y con distribución Bernoulli con probabilidad de éxito p. Es decir,

$$y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p, \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

   En lo que sigue puede utilizar que $\mathbb{E}(y) = p$ y $\text{Var}(y) = p(1-p)$.

   (a) (5 puntos) Demuestre que la media muestral $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_i y_i$ es un estimador consistente de p.

   (b) (5 puntos) Demuestre que $\bar{y}(1-\bar{y})$ es un estimador consistente de $\text{Var}(y) = p(1-p)$.

   (c) (5 puntos) Obtenga la distribución asintótica de $\sqrt{N}(\bar{y}-p)$. Obtenga una distribución aproximada de $\bar{y}$ para muestras grandes.

   (d) (5 puntos) Obtenga la distribución asintótica de $\sqrt{N}\frac{(\bar{y}-p)}{\sqrt{\bar{y}(1-\bar{y})}}$.

2. (20 puntos) La covarianza muestral se define como $S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_i^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ y la covarianza poblacional como $\sigma_{xy} = \mathbb{E}(xy) - \mathbb{E}(x)\,\mathbb{E}(y)$.

   (a) (5 puntos) Demuestre que la covarianza muestral $S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_i^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ se puede escribir como $S_{xy} = \frac{1}{N}\sum_i^N [(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)] - (\bar{x} - \mu_x)(\bar{y} - \mu_y)$ donde $\mu_x = \mathbb{E}(x)$ y $\mu_y = \mathbb{E}(y)$.

   (b) (5 puntos) Demuestre que la covarianza muestral es un estimador consistente de la covarianza poblacional, $S_{xy} \xrightarrow{p} \sigma_{xy}$.

   (c) (10 puntos) Demuestre que $\sqrt{N}(S_{xy} - \sigma_{xy}) \xrightarrow{d} \text{Normal}(0, \mathbb{E}[(x-\mu_x)^2(y-\mu_y)^2] - \sigma_{xy}^2)$.

3. (20 puntos) $\hat{\theta}_N$ es un estimador consistente y $\sqrt{N}$-asintóticamente normal del parámetro $\theta > 0$. Defina $\hat{\gamma}_N = \log(\hat{\theta}_N)$ como un estimador de $\gamma = \log(\theta)$.

   (a) (5 puntos) Demuestre que $\hat{\gamma}_N$ es un estimador consistente de γ.

(b) (10 puntos) Suponga que la varianza asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\theta}_N - \theta)$ es V. Encuentre la distribución asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N - \gamma)$.

(c) (5 puntos) Encuentre la distribución asintótica de $\hat{\gamma}_N$. Suponga que se obtiene de una muestra aleatoria que $\hat{\theta}_N = 4$ y $se(\hat{\theta}_N) = 2$. Calcule $\hat{\gamma}_N$ y su error estándar asintótico $se(\hat{\gamma}_N)$.

4. (20 puntos) $\hat{\theta}_N = (\hat{\theta}_{1N}, \hat{\theta}_{2N})'$ es un estimador consistente y $\sqrt{N}$-asintóticamente normal del vector $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ donde $\theta_2 \neq 0$. Defina $\hat{\gamma}_N = \hat{\theta}_{1N}/\hat{\theta}_{2N}$ como un estimador de $\gamma = \theta_1/\theta_2$.

   (a) (5 puntos) Demuestre que $\hat{\gamma}_N$ es un estimador consistente de γ.

   (b) (10 puntos) Encuentre la varianza asintótica de $\hat{\gamma}_N$ (AVar($\hat{\gamma}_N$)) en función de θ y la varianza asintótica de $\hat{\theta}_N$ (AVar($\hat{\theta}_N$)).
   Pista: Primero encuentre la distribución asintótica de $\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N - \gamma)$.

   (c) (5 puntos) Suponga que se obtiene de una muestra aleatoria que $\hat{\theta}_N = (-1.5, 0.5)'$ y una estimación de AVar($\hat{\theta}_N$) es

$$\begin{pmatrix} 1 & -.4 \\ -.4 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Calcule $\hat{\gamma}_N$ y su error estándar asintótico $se(\hat{\gamma}_N)$.